2.5.17 Dvojitá trojčlenka

Předpoklady: 020515

Př. 1: Čerpadlo o výkonu 1,5 kW vyčerpá ze sklepa vodu za 3 hodiny. Za jak dlouho by vodu ze sklepa vyčerpalo čerpadlo o výkonu 2,2 kW?

Čím výkonnější čerpadlo, tím rychleji čerpá vodu a tím kratší čas bude potřeba k jejímu vyčerpání $\Rightarrow$ nejde o přímou úměrnost $\Rightarrow$ nemůžeme počítat klasickou trojčlenkou.

1,5 kWh	...	3 hodiny
2,2 kWh	...	x hodin

Množství vyčerpané vody zůstává stejné: $1,5\cdot 3 = 2,2\cdot x \qquad / : 2,2$

$$x = \frac{1,5\cdot 3}{2,2} = 2,05 \text{ hodiny}$$

Výkonnější čerpadlo by vodu vyčerpalo za 2,05 hodiny.

Pedagogická poznámka: Stačí, když žáci poznají, že nejde o přímo úměrnost nemohou tedy příklad počítat běžným postupem. Tato skutečnost by jim měla dojít nejpozději ve chvíli, kdy dojdou k výsledku 4,4 hodiny. Správný výsledek po žácích zatím nechci, kdo ho najde, zaslouží samozřejmě pochvalu. Řešení si ukazujeme, ale ještě z něj neděláme standardní postup.

Př. 2: Jirka ujde za čtyři devítiny hodiny vzdálenost pět třetin km. Za jak dlouho ujde sedm čtvrtin km?

Čím déle Jirka jde, tím větší vzdálenost ujde $\Rightarrow$ přímá úměrnost.

$\frac{4}{9}$ hod	...	$\frac{5}{3}$ km
x hod	...	$\frac{7}{4}$ km

$$\frac{x}{\frac{7}{4}} = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{5}{3}} \qquad / \cdot \frac{7}{4} \qquad \text{(počet km za 1 hodinu se nemění)}$$

$$x = \frac{4\cdot 3}{9\cdot 5}\cdot\frac{7}{4} = \frac{7}{15}$$

Jirka ujde sedm čtvrtin km za sedm patnáctin hodiny.

Pedagogická poznámka: Následující příklad je první dvojitou trojčlenkou. Nechávám žákům čas na pokus o samostatné řešení (většina úspěšných pokusů je postavená na výpočtu ceny za 1 litr obsahu, občas někdo sestaví í výraz podobný okamžitému řešení, které ještě budeme probírat.), pak příklad řeším na tabuli. Vysvětlím, že jde o dvě trojčlenky, které můžeme řešit zvlášť. Napíšu první trojčlenku a nechám třídu ji vyřešit, pak jim dám šanci pokusit se o sestavení druhé trojčlenky.

Při řešení všech příkladů zdůrazňuji, že dvojitá trojčlenka je dobrým příkladem jednoho z nejpoužívanějších matematických postupů (převedení těžkého problému na více problémů jednodušších). Nejčastějším problémem je použití původních hodnot v druhé trojčlence místo hodnot vypočtených v první trojčlence.

Pedagogická poznámka: Část žáků řeší dvojité trojčlenky přímým sestavením výrazu pro výsledek (více v hodině 020522). Tento způsob řešení nepotlačuji, ale trvám na tom, že následující příklady musejí spočítat také pomocí dvojité trojčlenky.

Př. 3: 15 lahví o objemu 0,7 litru stálo 3520 Kč. Kolik by stálo 9 lahví o objemu 1,5 litru?

Dvojitá trojčlenka (dvě závislosti najednou - cena závisí na počtu lahví i jejich objemu).

15 lahví ... 0,7 litru ... 3520 Kč
9 lahví ... 1,5 litru ... x Kč

Neumíme řešit obě závislosti najednou $\Rightarrow$ rozdělíme příklad na dvě části.

15 lahví ... 0,7 litru ... 3520 Kč
9 lahví ... 0,7 litru ... y Kč

Přímá úměra: čím více lahví, tím více zaplatíme.

$$\frac{y}{9}=\frac{3520}{15} \quad / \cdot 9 \quad \text{(cena jedné lahve se nemění)}$$

$$y=\frac{3520}{15}\cdot 9=2112 \text{ Kč}$$

Výsledek můžeme použít k provedení druhého kroku a dopočtení příkladu.

9 lahví ... 0,7 litru ... 2112 Kč
9 lahví ... 1,5 litru ... x Kč

Přímá úměra: čím větší objem, tím větší cena.

$$\frac{x}{1,5}=\frac{2112}{0,7} \quad / \cdot 1,5$$

$$x=\frac{2112}{0,7}\cdot 1,5 \doteq 4525,7 \text{ Kč}$$

9 lahví o objemu 1,5 litru by stálo 4525,70 Kč.

Pedagogická poznámka: Nejčastějším problémem je dosazení do druhé trojčlenky, kdy žáci nepoužívají hodnotu vypočtenou v první trojčlence, ale údaj ze zadání.

Př. 4: 5 čerpadel vyčerpá za 3 hodiny $40\,\text{m}^3$ vody. Kolik vody vyčerpají za 7 hodin 4 čerpadla?

Dvojitá trojčlenka (dvě závislosti najednou - množství vody závisí na počtu čerpadel i jejich výkonu).

5 čerpadel ... 3 hodiny ... 40 m^3
4 čerpadla ... 7 hodin ... x m^3

Neumíme řešit obě závislosti najednou $\Rightarrow$ rozdělíme příklad na dvě části.

5 čerpadel ... 3 hodiny ... 40 m^3
4 čerpadla ... 3 hodiny ... y m^3

Přímá úměra: čím více čerpadel, tím více přečerpané vody.

$\frac{y}{4}=\frac{40}{5}$ $/\cdot 4$ (množství vody přečerpané jedním čerpadlem se nemění)

$y=\frac{40}{5}\cdot 4=32\ \mathrm{m}^3$

Výsledek můžeme použít k provedení druhého kroku a dopočtení příkladu.

4 čerpadla ... 3 hodiny ... $32\ \mathrm{m}^3$
4 čerpadla ... 7 hodin ... $x\ \mathrm{m}^3$

Přímá úměra: čím více hodin, tím více přečerpané vody.

$\frac{x}{7}=\frac{32}{3}$ $/\cdot 7$

$x=\frac{32}{3}\cdot 7=74,\overline{6}\ \mathrm{m}^3$

Čtyři čerpadla by za 7 hodin vyčerpala $74,\overline{6}\ \mathrm{m}^3$.

Pedagogická poznámka: Určitě se objeví hlasy, že předchozí příklad není přímá úměrnost, protože je o čerpadlech stejně jako první příklad. Říkám žákům na rovinu, že přesně z tohoto důvodu jsem oba příklady do hodiny zařadil. Skutečnost, že se v obou zadáních vyskytuje slovo čerpadlo v žádném případě neznamená, že jde o stejnou děj. Není možné dopředu stanovit, které příklady jsou a které nejsou přímá úměrnost, podle výskytu nějakých slov. Jedinou možností je u každého příkladu se zamyslet, zda popisuje přímou úměrnost nebo ne.

Př. 5: Svícení patnácti žárovkami o výkonu 60 W stálo dohromady 1800 Kč za rok. Kolik by stálo svícení 20 LED žárovkami o výkonu 5 W?

Dvojitá trojčlenka - dvě závislosti najednou - množství spotřebované energie (a tedy i platba) závisí na počtu a výkonu žárovek.

15 žárovek ... 60 W ... 1800 Kč
20 žárovek ... 5 W ... x Kč

Neumíme řešit obě závislosti najednou $\Rightarrow$ rozdělíme příklad na dvě části.

15 žárovek ... 60 W ... 1800 Kč
15 žárovek ... 5 W ... y Kč

Přímá úměra: čím větší výkon, tím větší spotřeba a tím větší platba za energii.

$\frac{y}{5}=\frac{1800}{60}$ $/\cdot 5$ (cena za instalovaný watt se nemění)

$y=\frac{1800}{60}\cdot 5=150\ \text{Kč}$

Výsledek můžeme použít k provedení druhého kroku a dopočtení příkladu.

15 žárovek ... 5 W ... 150 Kč
20 žárovek ... 5 W ... x Kč

Přímá úměra: čím více žárovek, tím větší spotřeba.

$\frac{x}{20}=\frac{150}{15}$ $/\cdot 20$

$x = \frac{150}{15} \cdot 20 = 200\ \text{Kč}$

Svícení 20 LED žárovkami o výkonu 5 W by stálo 200 Kč ročně.

Př. 6: 15 automobilů o nosnosti 7 tun přepraví za pět dní 5000 tun zeminy. Kolik tun zeminy přepraví za sedm dní 19 automobilů o nosnosti 10 t?

Trojitá trojčlenka - tři závislosti najednou - množství přepravené zeminy závisí na počtu, výkonu aut i na počtu dní.

15 automobilů	...	7 t	...	5 dní	...	5000 t
19 automobilů	...	10 t	...	7 dní	...	x t

Rozdělíme příklad na tři části.

15 automobilů	...	7 t	...	5 dní	...	5000 t
19 automobilů	...	7 t	...	5 dní	...	y t

Přímá úměra: čím více automobilů, tím více převezené zeminy.

$\frac{y}{19} = \frac{5000}{15}$ $/ \cdot 19$ (množství zeminy převezené jedním autem se nemění)

$y = \frac{5000}{15} \cdot 19 \doteq 6333\ \text{t}$

Výsledek použijeme k provedení druhého kroku.

19 automobilů	...	7 t	...	5 dní	...	6333 t
19 automobilů	...	10 t	...	5 dní	...	z t

Přímá úměra: čím větší nosnost automobilů, tím více převezené zeminy.

$\frac{x}{10} = \frac{6333}{7}$ $/ \cdot 10$ (množství zeminy připadají na 1 tunu nosností se nemění)

$x = \frac{6333}{7} \cdot 10 \doteq 9048\ \text{tun}$

Výsledek použijeme k provedení třetího kroku.

19 automobilů	...	10 t	...	5 dní	...	9048 t
19 automobilů	...	10 t	...	7 dní	...	x t

Přímá úměra: čím více dnů, tím více převezené zeminy.

$\frac{x}{7} = \frac{9408}{5}$ $/ \cdot 7$ (množství zeminy převezené za jeden den se nemění)

$x = \frac{9048}{5} \cdot 7 \doteq 12700\ \text{tun}$

19 automobilů o nosnosti 10 přepraví za 7 dní 12700 tun zeminy.

Př. 7: Za sedm pětimetrových hranolů 10 x 10 na strop zaplatil Jarda 5500 Kč. Kolik by zaplatil za pět sedmimetrových hranolů 12 x 12 cm? Cena dřeva za m^3 je stejná.

Zadání obsahuje příliš mnoho údajů $\Rightarrow$ musíme si ujasnit jejich význam.

Cena za trámy závisí na:

- počtu trámů,

- objemu trámů.

Objem původního trámu: $V = 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 5 = 0{,}05\,\mathrm{m}^3$.

Objem nového trámu: $V = 0{,}12 \cdot 0{,}12 \cdot 7 = 0{,}1008\,\mathrm{m}^3$.

7 hranolů ... $0{,}05\,\mathrm{m}^3$ ... 5500 Kč

5 hranolů ... $0{,}1008\,\mathrm{m}^3$ ... x Kč

Neumíme řešit obě závislosti najednou $\Rightarrow$ rozdělíme příklad na dvě části.

7 hranolů ... $0{,}05\,\mathrm{m}^3$ ... 5500 Kč

7 hranolů ... $0{,}1008\,\mathrm{m}^3$ ... y Kč

Přímá úměra: čím větší trám, tím vyšší cena.

$$\frac{y}{0{,}1008} = \frac{5500}{0{,}05} \qquad / \cdot 0{,}1008 \qquad \text{(cena za instalovaný watt se nemění)}$$

$$y = \frac{5500}{0{,}05} \cdot 0{,}1008 = 11088 \text{ Kč}$$

Výsledek můžeme použít k provedení druhého kroku a dopočtení příkladu.

7 hranolů ... $0{,}1008\,\mathrm{m}^3$ ... 11088 Kč

5 hranolů ... $0{,}1008\,\mathrm{m}^3$ ... x Kč

Přímá úměra: čím více trámů, tím vyšší cena.

$$\frac{x}{5} = \frac{11088}{7} \qquad / \cdot 5$$

$$x = \frac{11088}{7} \cdot 5 = 7920 \text{ Kč}$$

Za pět sedmimetrových hranolů 12 x 12 cm zaplatí Jarda 7920 Kč.

Pedagogická poznámka: Přirozenějším způsobem výpočtu (který bych sám použil) je vypočítat objemy dřeva v obou případech a příklad vypočítat přes jednotkovou cenu.

Shrnutí: Složitý příklad se dvěma závislostmi můžeme rozdělit na dva jednoduché.